635. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就イテ, XII

福原　満洲雄（九大）

1. 今度ハ

(1) $$x\frac{dy}{dx}=yf(x,y)$$

ニ於テ

(2) $$f(x,y)=\sum_{j,k}a_{jk}x^{j}y^{k}$$

$$(a_{00}=\cdots\cdots=a_{0,n-1}=0,\quad a_{0n}\neq 0)$$

ナル形ニ展開サレル場合ヲ考ヘル。

形式的解　先ヅ (1) ノ形式的ノ解ヲ求メル為メ

(3) $$y=z\sum_{j,k}p_{jk}x^{j}z^{k}\qquad (p_{00}=1)$$

ナル置換ヲ行フ．z ニ関スル方程式ハ

$$x\frac{dz}{dx}=z\sum_{j,k}c_{jk}x^{j}z^{k}$$

ナル形ヲ持ツ．c_{0n}, $c_{0,2n}$ ヲ除キ其ノ他ノ c_{jk} ヲ 0 トスルヤウニ (3) ノ展開式ノ係数 p_{jk} ヲキメルコトが出来ル．勿論級数ノ收斂性ハ考慮ニ入レテナイ、ソノヤウニ p_{jk} ヲキメタモノトスレバ変換サレタ方程式ハ

(4) $$x\frac{dz}{dx}=cz^{n+1}+c'z^{2n+1}$$

ナル形ヲ持ツ. z ヲ (4) ノ一般解トスレバ (3) ガ (1) ノ形式的ノ解トナル。

2. 次ニ方程式 (4) ノ始末デアル. $z^{-n}=u$ ト置ケバ (4) ハ

$$xu'=-nc-nc'u^{-1}$$

トナル、更ニ $v=Au,\ \xi=x^{\rho}$ ト置ケバ

$$\xi\frac{dv}{d\xi}=-\frac{nA}{\rho}\left(c+c'\frac{A}{v}\right)$$

トナル。

$$(5)\quad A=\frac{c}{c'},\quad \rho=-\frac{nc^2}{c'}$$

ト取レバ

$$\xi\frac{dv}{d\xi}=1+v^{-1}$$

トナル. 最後ニ $t=\log\xi$ ト置クコトニヨリ

$$(6)\quad \frac{dv}{dt}=1+v^{-1}$$

ヲ得ル. $t=0$ デ $v=0$ トナル (6) ノ解 ($t=0$ ハ分岐点デアル) ヲ $v=\alpha(t)$ ト書クコトニスル. (6) ノ一般解ハ $v=\alpha(t+C)$ ト書クコトガ出来ル. 依ッテ (4) ノ解ハ

$$(7)\quad z=\left(\frac{1}{A}\alpha(\rho\log x+C)\right)^{-\frac{1}{n}}$$

トナル。 A,ρ ハ (5) ニ依ッテ與ヘラレル. C ハ勝手ナ常数

デアル、以上ハ $c'\neq 0$ ノ場合デアル. $c'=0$ ノ場合ニハ (4) ノ一般解ハ

$$(7')\quad z=\left(-nc\log x+C\right)^{-\frac{1}{n}}$$

デアル。

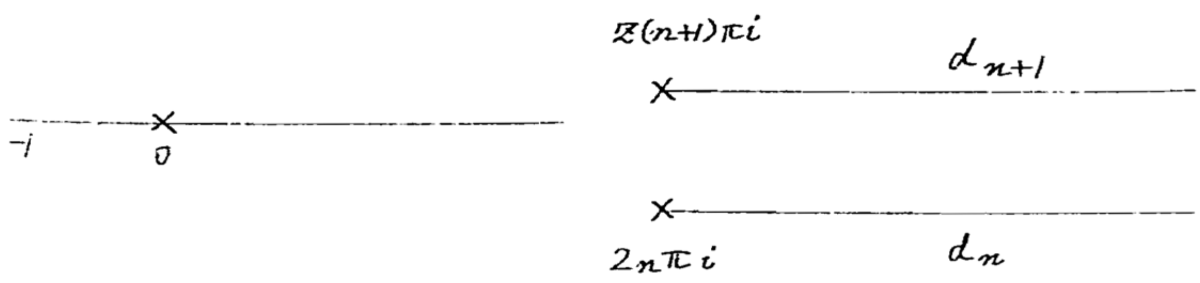
3. (4) ノ一般解ガ (7) 又ハ (7') ニ依ッテ與ヘラレルカラ之レヲ (3) ニ入レルト (1) ノ形式的ノ解ガ得ラレルノデアル。結論ヲ大雑把ニ言ヘバ此ノヤウニシテ得ラレタ級数(3)ガ(1)ノ一般解ヲ漸近的ニ表ハスノデアルガ，本論ニ入ルニ先ツテ $v(0)=0$ ヲ満足スル (6) ノ解 $v=\alpha(t)$ ノ性質ヲ調ベテ置カナケレバナラナイ。

(6) ヲ積分シテ $\alpha(0)=0$ デアルコトニ注意スレバ

$$(8)\quad \alpha-\log(1+\alpha)=t$$

ヲ得ル. (6) ハ $v=-1,\ \infty$ ナル解ヲ持ツカラ $\alpha(t)$ ハ $-1,\ \infty$ ナル値ヲ取ラナイ. 依ッテ $\alpha(t)$ ノ特異点ハ $\alpha=0$ トナル点即チ $t=0,\ \pm 2\pi i,\ \pm 4\pi i,\cdots\cdots$ デアル. (8) ニ依ッテ α 平面ニ於テ實軸上ノ $-1,+\infty$ ヲ結ブ半直線ニ沿ッテ切レ目ヲ

α 平面　　　　t 平面



入レタ一枚ノ平面 G ガ t 平面ニ於テ $2n\pi i$, $2(n+1)\pi i$ ヲ一端トシ，實軸ト平行ニ右ニ伸ビタニツノ半直線 d_n, d_{n+1} ニ沿ッテ切レ目ヲ入レタ一枚ノ平面 F_n ニ一對一ニ對應スル．コノ對應ニ於イテ α 平面ニ於ケル $(0, +\infty)$ ノ上ノ縁ニ t 平面ニ於ケル d_{n+1} ノ上ノ縁ガ，α 平面ニ於ケル $(-1, 0)$ ノ上ノ縁ニ t 平面ニ於ケル d_{n+1} ノ下ノ縁ガ，α 平面ニ於ケル $(-1, 0)$ ノ下ノ縁ニ t 平面ニ於ケル d_n ノ上ノ縁ガ，α 平面ニ於ケル $(0, +\infty)$ ノ下ノ縁ニ d_n ノ下ノ縁ガ對應スル．t ガ d_n ト d_{n+1} ノ間カラ ∞ ニ近ヅケバ $\alpha \to -1$ トナリ，t ガ d_n ト d_{n+1} ノ間ニ入ラヌヤウニ ∞ ニ近ヅケバ $\alpha \to \infty$ トナル．又 d_n ノ上ノ縁ノ点ト，ソレニ對應スル d_{n+1} ノ下ノ縁ノ点トニ對應スル α ノ値ハ等シイ．依ッテ $\alpha(t)$ ノ Riemann 面ハ F_n ノ d_n ノ上ノ縁ヲ F_{n-1} ノ d_n ノ下ノ縁トツナギ，F_n ノ下ノ縁ヲ F_{n-1} ノ d_n ノ上ノ縁トツナグコトニヨッテ得ラレル。

4. Ω ヲ與ヘラレタ勝手ナ角トシ，R ヲ十分ニ大キク取レバ，以上述ベタ所カラ次ノ事實ガ分ル。

$|t_0| \geqq R$ デ t_0 ハ d_0, d_1 ノ間ニナイ F_0 ノ上ノ点トスル．t ガ t_0 カラ出發シテ $|t| \geqq R$, $|\arg t| \leqq \Omega$ ナル部分ニ屬シナガラ ∞ ニ近ヅケバ $\alpha(t) \to \infty$ トナル。

$\Re t_0 > 0$, $0 < \Im t_0 < 2\pi$ ナル F_0 ノ上ノ点 t_0 カラ出發シテ $|\arg t| < \frac{\pi}{2}$, $\Re t \to +\infty$ トナルヤウニ t ガ ∞ ニ近ヅケバ $\alpha(t) \to -1$ デアル。

5. $\alpha = t(1+w)$ ト置ケバ (8) ハ

$$w = t^{-1}[\log t + \log(1 + w + t^{-1})]$$

トナル。

コノ右辺ハ t^{-1}, $t^{-1}\log t$, w ノ冪級数ニ展開サレル. 而モ其等ニ関シテ0次ノ項ハ0, 一次ノ項ハ $t^{-1}\log t$ ダケデアル。依ッテ

$$w = t^{-1}\log t + \cdots\cdots.$$

ナル形ニ展開サレル. 書イテナイ部分ハ t^{-1}, $t^{-1}\log t$ ノ冪級数デ, 其等ニ関シテ0次又ハ一次ノ項ヲ含マナイ。コレカラ

$$(9) \quad \alpha(t) = t(1 + t^{-1}\log t + \cdots\cdots)$$

ヲ得ル。此ノ展開式ハ $t \to \infty$ ノトキ $\alpha(t) \to \infty$ トナル $\alpha(t)$ ノ値ヲ與ヘル。

$\alpha = -1 + w$ ト置ケバ (8) ハ

$$w = e^{1-t-w}$$

トナル. コレカラ

$$w = e^{1-t}(1 + \cdots\cdots)$$

ナル展開式ヲ得ル. 書カレテナイ部分ハ e^{-t} ノ冪級数デ0次ノ項ヲ含マナイ. 依ッテ

$$(10) \quad \alpha(t) = -1 + e^{1-t} + \cdots\cdots$$

ナル展開式ヲ得ル. コレハ $t \to \infty$ ノ時 $\alpha(t) \longrightarrow -1$ トナル $\alpha(t)$ ノ値ヲ與ヘル。

以上 $\alpha(t)$ ニ就イテ述ベタ事柄ガスベテ必要ナノデハナイ. 序デアルカラ述ベタ迄デアッテ今後必要ナノハ展開式

(9) デアル。